Variante: Eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V^r \to W$ heisst *antisymmetrisch*, wenn gilt

$$\forall v_1, \ldots, v_r \in V \ \forall \sigma \in S_r: \ \varphi(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma r}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_r).$$

Proposition: (a) Es gilt immer alternierend $\Rightarrow$ antisymmetrisch.

(b) Ist $1+1 \neq 0$ in K, so gilt antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ alternierend.

(c) Ist $\overline{1+1 = 0}$ in K, so gilt antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ symmetrisch.

Der Begriff „antisymmetrisch“ ist daher weniger wichtig als die übrigen.

Bew.: (c) ✓.

$r=2$: (a) Sei $\varphi: V\times V \to W$ bilinear alternierend.

$$\left.\begin{aligned} \forall v, v' \in V: \quad & \varphi(v+v', v+v') = 0 \\ & \qquad \| \\ & \underbrace{\varphi(v,v)}_{=0} + \varphi(v,v') + \varphi(v',v) + \underbrace{\varphi(v',v')}_{=0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(v',v) = -\varphi(v,v').$$

(b) φ bilinear, antisymmetrisch $\Rightarrow \forall v: \ \varphi(v,v) = -\varphi(v,v) \Rightarrow 2\cdot\varphi(v,v) = 0. \Rightarrow \varphi(v,v) = 0.$

$r = 0,1$: alles erfüllt.

$r > 2$: Fixiere $i<j$ und $v_k \in V$ für alle $k \neq i,j$.

und betrachte $V\times V \to W$, $(v_i, v_j) \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_r)$. bilineare Abb.

folgt aus dem Fall $r=2$.

q.e.d.

Proposition: *(Funktorialität)* Lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ induzieren lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^r_K(V,W) &\to \mathrm{Sym}^r_K(V',W'), \\ \mathrm{Alt}^r_K(V,W) &\to \mathrm{Alt}^r_K(V',W'), \\ \varphi &\mapsto g\circ\varphi\circ(f\times\ldots\times f). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} V\times\ldots\times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "///"] & W \arrow[d, "g"] \\ V'\times\ldots\times V' \arrow[u, "f\ \ldots\ f"] \arrow[r, "g\circ\varphi\circ(f\times\ldots\times f)"'] & W' \end{tikzcd}$$

Erinnerung:

Proposition: Betrachte Basen B_i von V_i sowie C von W. Betrachte ein System von Koeffizienten $\alpha^c_{b_1,\ldots,b_r} \in K$ für alle $b_i \in B_i$ und $c \in C$ mit der Eigenschaft $\forall b_i \in B_i\colon\ \big|\{c \in C \mid \alpha^c_{b_1,\ldots,b_r} \neq 0\}\big| < \infty$. Dann existiert genau eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V_1\times\ldots\times V_r \to W$, so dass für alle $b_i \in B_i$ gilt:

$$\boxed{\varphi(b_1,\ldots,b_r) = {\sum_{c\in C}}' \alpha^c_{b_1,\ldots,b_r} c.}$$

Umgekehrt hat jede multilineare Abbildung $\varphi\colon V_1\times\ldots\times V_r \to W$ diese Gestalt für eindeutige Koeffizienten $\alpha^c_{b_1,\ldots,b_r}$.

$\forall b_1,\ldots,b_r \in B: \forall\sigma:\quad \varphi(\sigma b_1,\ldots,\sigma b_r) = {\sum_c}' \alpha^c_{\sigma b_1,\ldots,\sigma b_r}\, c.$

$\Rightarrow$ die multilineare Abb. $(v_1,\ldots,v_r) \mapsto \varphi(\sigma v_1,\ldots,\sigma v_r)$ hat die Koeffizienten $(\alpha^c_{\sigma b_1,\ldots,\sigma b_r})_{b_1,\ldots,b_r,c}$

Diese ist gleich φ genau dann wenn diese Koeffizienten gleich $(\alpha^c_{b_1,\dots b_r})$ sind.

Proposition: Betrachte Basen B von V und C von W, sowie eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V^r \to W$ mit Koeffizienten $\alpha^c_{b_1,\dots,b_r} \in K$ wie in §12.1. Dann ist φ symmetrisch genau dann, wenn gilt

$$\forall b_i \in B\ \forall c \in C\ \forall \sigma \in S_r\colon \boxed{\alpha^c_{b_{\sigma 1},\dots,b_{\sigma r}} = \alpha^c_{b_1,\dots,b_r}.}$$

Dagegen ist φ alternierend genau dann, wenn gilt

$$\forall b_i \in B\ \forall c \in C\colon \ \begin{cases} (a)\ \forall \sigma \in S_r\colon \boxed{\alpha^c_{b_{\sigma 1},\dots,b_{\sigma r}} = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \alpha^c_{b_1,\dots,b_r}} & \text{und} \\ (b)\ (\exists i \neq i'\colon\ b_i = b_{i'}) \longrightarrow \boxed{\alpha^c_{b_1,\dots,b_r} = 0.} \end{cases}$$

Im Spezialfall $r = 2$ bedeutet dies, dass für jedes $c \in C$ die Matrix $A_c := (\alpha^c_{b_1,b_2})_{b_1,b_2\in B}$ symmetrisch ist, bzw. antisymmetrisch mit Diagonale Null.

Bew.: symm. s.o.

φ alternierend $\Rightarrow$ antisymmetrisch $\Rightarrow$ (a) wie oben.
und wenn $i \neq i'$ mit $b_i = b_{i'}$ dann $0 = \varphi(b_1,\dots,b_r) = \sum'_{c\in C} \alpha^c_{b_1\dots b_r}\, c \Rightarrow$ alle $\alpha^c_{b_1\dots b_r} = 0$.
$\Rightarrow$ (b).

Umgekehrt gelte (a) und (b).

$r = 2$: $v = \sum_{b\in B} x_b \cdot b$ beliebig $\Rightarrow \varphi(v,v) = \sum_{b_1\in B}\sum_{b_2\in B} x_{b_1}\cdot x_{b_2}\cdot \varphi(b_1,b_2)$

$$= \sum_{b\in B} x_b^2 \cdot \underbrace{\varphi(b,b)}_{\overset{(b)}{=}\,0} + \sum_{b_1\neq b_2} \underbrace{x_{b_1}\cdot x_{b_2}\cdot \varphi(b_1,b_2)} = 0.$$

Hebt sich weg mit dem Term für (b_2,b_1). qed.

r allgemein wie oben.

Proposition:

$$\boxed{\begin{aligned}\dim_K \mathrm{Sym}^r_K(V,W) &= \binom{\dim_K(V^\vee)+r-1}{r}\cdot \dim_K(W),\\ \dim_K \mathrm{Alt}^r_K(V,W) &= \binom{\dim_K(V^\vee)}{r}\cdot\dim_K(W).\end{aligned}}$$

Erinn.: $\binom{X}{r} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-r+1)}{r!}$

$\dim_K \mathrm{Sym}(V,W) = \dim_K\Big(\{(\alpha^c_{i_1,\dots,i_r})_{i_1,\dots,i_r,c} \mid$ alle in K, Endlichkeitsbedingung, Symmetrie $\}\Big) = \dim(W)\cdot\#\underbrace{\{(i_1,\dots,i_r)\in\mathbb{Z}^r \mid 1\le i_1\le\dots\le i_r\le n\}}_{\|}$

$n := \dim_K(V) < \infty$

$(i_1,\dots,i_r) \mapsto (i_1, i_2+1,\dots,i_r+r-1)$

$\#\{(j_1,\dots,j_r)\in\mathbb{Z}^r \mid 1\le j_1<j_2<\dots<j_r\le n+r-1\} = \binom{n+r-1}{r}.$

Folge: Für alle $r > \dim_K(V)$ gilt $\mathrm{Alt}^r_K(V,W)=0$.

Für $r=\dim_K(V)$ gilt $\dim_K \mathrm{Alt}^r_K(V,K)=1$.

$\dim_K \mathrm{Alt}(V,W) = \dots = \dim(W)\cdot\underbrace{\#\{(i_1,\dots,i_r)\in\mathbb{Z}^r \mid 1\le i_1<\dots<i_r\le n\}}_{\binom{n}{r}}$. ✓

qed.

Beispiel: Die k-te Ableitung einer C^k-Funktion $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ist eine symmetrische multilineare Abbildung $(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}^m$; ihre Koeffizienten sind die partiellen Ableitungen der Ordnung k.

Beispiel: Die Determinante induziert eine von Null verschiedene alternierende multilineare Abbildung

$$(K^n)^n \to K, \ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det((v_1, \dots, v_n)).$$

Aus Dimensionsgründen bildet diese eine Basis von $\mathrm{Alt}^n_K(K^n, K)$.

Satz: Für jeden Endomorphismus f eines K-Vektorraums V der Dimension $n < \infty$ und jedes $\varphi \in \mathrm{Alt}^n_K(V, K)$ gilt

$$\varphi \circ (f \times \dots \times f) \ = \ \det(f) \cdot \varphi.$$

Bemerkung: Damit kann man die Determinante alternativ und basisfrei konstruieren.

dim. 1.

Bew.: Wähle Iso $K^n \xrightarrow{\sim} V$ via Basis $(b_1, \dots, b_n)$ $\rightsquigarrow$ f entspricht Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$.

Wähle $0 \neq \varphi \in \mathrm{Alt}^n_K(V, K)$ durch $\varphi(b_1, \dots, b_n) = 1$

$\Rightarrow$ $\varphi(b_{\sigma 1}, \dots, b_{\sigma n}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

$$\varphi(f(b_1), \dots, f(b_n)) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n a_{i1} b_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} b_i\Big)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \cdot \varphi(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma 1,1} \cdots a_{\sigma n,n} \cdot \underbrace{\varphi(b_{\sigma 1}, \dots, b_{\sigma n})}_{\mathrm{sgn}(\sigma)} = \det(A) = \det(f).$$

qed.

12.3 Tensorprodukt

Betrachte zwei K-Vektorräume V_1 und V_2.

Definition: Ein *Tensorprodukt von V_1 und V_2 über K* besteht aus einem K-Vektorraum $\tilde{V}$ und einer bilinearen Abbildung $\kappa\colon V_1 \times V_2 \to \tilde{V}$ mit der *universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon \tilde{V} \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & W \\
& \tilde{V} \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposition: Ein Tensorprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, mit anderen Worten: Ist sowohl $(\tilde{V}, \kappa)$ wie $(\tilde{V}', \kappa')$ ein Tensorprodukt von V_1 und V_2, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $i\colon \tilde{V} \xrightarrow{\sim} \tilde{V}'$ mit $i \circ \kappa = \kappa'$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & \tilde{V}' \\
& \tilde{V} \arrow[ur, dotted, "i"', "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{V} \\
V_1 \times V_2 \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"] \arrow[ddr, "\kappa'"'] & \tilde{V}' \arrow[u, "j"'] \\
 & \tilde{V} \arrow[u, "i"'] \\
 & \tilde{V}' \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

Bew.:

i ist eindeutig da $(\tilde{V}, \kappa)$ Tensorprodukt ist.

Ein Homo $i\colon \tilde{V} \to \tilde{V}'$ mit $i \circ \kappa = \kappa'$ existiert aus demselben Grund.

Da $(\tilde{V}', \kappa')$ ein Tensorprodukt ist, existiert ein Homo $j\colon \tilde{V}' \to \tilde{V}$ mit $j \circ \kappa' = \kappa$

Jetzt gilt $j \circ i \circ \kappa = \kappa = \mathrm{id}_{\tilde{V}} \circ \kappa$. Folglich erfüllen $j \circ i$ als auch $\mathrm{id}_{\tilde{V}}$ die UE. für $(W, \varphi) = (\tilde{V}, \kappa)$.

$\Rightarrow j \circ i = \mathrm{id}_{\tilde{V}}$. Analog: $i \circ j \circ \kappa' = \kappa' = \mathrm{id}_{\tilde{V}'} \circ \kappa \overset{UE}{\Rightarrow} i \circ j = \mathrm{id}_{\tilde{V}'}$. Also ist i ein Isom. qed